0001545454548999

# 龍谷大学

2010年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 大きさ $\sqrt{3}$ のベクトル $\vec{a}$ と大きさ2のベクトル $\vec{b}$ を考える．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ が $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ を満たすとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めなさい．

(2) $\vec{p}=(\cos t)\vec{a}+(\sin t)\vec{b}$，$\vec{q}=(-\sin t)\vec{a}+(\cos t)\vec{b}$ とするとき，$\left|\vec{q}-\vec{p}\right|^2$ を $t$ で表しなさい．

(3) $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲で (2) の $\left|\vec{q}-\vec{p}\right|^2$ の最大値と最小値を求めなさい．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}$

$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ //

(2) $|\vec{q}-\vec{p}|^2=|(-\sin t-\cos t)\vec{a}+(\cos t-\sin t)\vec{b}|$

$=(\sin t+\cos t)^2|\vec{a}|^2-2(\sin t+\cos t)(\cos t-\sin t)\,\vec{a}\cdot\vec{b}+(\cos t-\sin t)^2|\vec{b}|^2$

$=3(\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t)-\sqrt{3}(\cos^2 t-\sin^2 t)+4(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t)$

$=(7+\sqrt{3})\sin^2 t-2\sin t\cos t+(7-\sqrt{3})\cos^2 t$

$=\sqrt{3}(\sin^2 t-\cos^2 t)-2\sin t\cos t+7$

$=\underline{-\sqrt{3}\cos 2t-\sin 2t+7}$ //

(3) (2) より，

$|\vec{q}-\vec{p}|^2=7-2\left(\sin 2t\cdot\frac{1}{2}+\cos 2t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=7-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq t\leqq\pi$ より．$\frac{\pi}{3}\leqq 2t+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{3}\pi$

$\therefore$ $|\vec{q}-\vec{p}|^2$ の <u>最大値は 9 $\left(t=\frac{7}{12}\pi\right)$，最小値は 5 $\left(t=\frac{\pi}{12}\right)$</u> //