

2011年第2問

 数理  
石井K

 2 不等式  $-\sqrt{5} \leq x - \frac{1}{x} \leq \sqrt{5}$  を解け.

 •  $-\sqrt{5} \leq x - \frac{1}{x}$  を解く.  $x \neq 0$  であるから次の2つの場合に分ける
(i)  $x > 0$  のとき

$$\text{両辺に } x \text{ をかけて. } -\sqrt{5}x \leq x^2 - 1$$

$$\therefore x^2 + \sqrt{5}x - 1 \geq 0$$

$$\therefore x \leq \frac{-\sqrt{5}-3}{2}, \frac{-\sqrt{5}+3}{2} \leq x$$

$$\text{いま, } x > 0 \text{ であるから. } x \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(ii)  $x < 0$  のとき.

$$\text{両辺に } x (< 0) \text{ をかけて. } -\sqrt{5}x \geq x^2 - 1$$

$$\therefore x^2 + \sqrt{5}x - 1 \leq 0$$

$$\therefore \frac{-\sqrt{5}-3}{2} \leq x \leq \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\text{いま, } x < 0 \text{ であるから. } -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x < 0$$

$$(i), (ii) \text{ より. } -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x < 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \dots \textcircled{1}$$

 •  $x - \frac{1}{x} \leq \sqrt{5}$  も同様にして解くと

$$(i) x > 0 \text{ のとき. } x^2 - \sqrt{5}x - 1 \leq 0 \quad \therefore \frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$x > 0 \text{ より. } 0 < x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$(ii) x < 0 \text{ のとき. } x^2 - \sqrt{5}x - 1 \geq 0 \quad \therefore x \leq \frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2} \leq x$$

$$x < 0 \text{ より } x \leq \frac{\sqrt{5}-3}{2}$$

$$(i), (ii) \text{ より. } x \leq \frac{\sqrt{5}-3}{2}, 0 < x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より. } -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq -\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

