2016年 文学部 第3問

$\boxed{3}$ 三角形ABCの面積が18で，頂点A，B，Cの対辺の長さをそれぞれa，b，cとするとき

$$a\cos B = 5, \quad b\sin A = 12$$

が成り立つとする．

(1) a，b，cを求めよ．

(2) $\cos A$の値を求めよ．

(1) 正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$\therefore\ a\sin B = b\sin A = 12$

$\therefore\ (a\cos B)^2 + (a\sin B)^2 = a^2$ に代入して，$a^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ $\therefore\ \underline{a = 13}$〃

$a\sin B = 12$ より，$\sin B = \dfrac{12}{13}$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}ac\sin B = 18$ より，$\dfrac{1}{2}\cdot 13\cdot c\cdot\dfrac{12}{13} = 18$ $\therefore\ \underline{c = 3}$〃

$a\cos B = 5$ より，$\cos B = \dfrac{5}{13}$

余弦定理より，$b^2 = 13^2 + 3^2 - 2\cdot 13\cdot 3\cdot\dfrac{5}{13}$

$= 148$

$\therefore\ \underline{b = 2\sqrt{37}}$〃

(2) $\cos A = \dfrac{(2\sqrt{37})^2 + 3^2 - 13^2}{2\cdot 2\sqrt{37}\cdot 3}$

$= \dfrac{148 + 9 - 169}{12\sqrt{37}}$

$= \underline{-\dfrac{\sqrt{37}}{37}}$〃