学習院大学

2013年 法学部 第4問

数理 石井K

4 tは正の実数とする．放物線$C: y=-x^2$上の点$\mathrm{P}(t,\ -t^2)$を頂点とする放物線$y=3x^2+bx+c$をDとする．また，点$\mathrm{P}(t,\ -t^2)$におけるCの接線をLとする．

(1) b, cをtで表せ．

(2) LとDの交点を求めよ．

(3) CとDの上側にあってLの下側にある部分の面積を求めよ．

(1) $y=3x^2+bx+c$

$=3\left(x^2+\frac{b}{3}x\right)+c$

$=3\left(x+\frac{b}{6}\right)^2-\frac{b^2}{12}+c$

∴ 頂点は. $\left(-\frac{b}{6},\ -\frac{b^2}{12}+c\right)=(t,\ -t^2)$

$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{6}=t \\ -\frac{b^2}{12}+c=-t^2 \end{cases}$

∴ $b=-6t$, $c=2t^2$ //

(2) $C: y=-x^2$ より, $y'=-2x$

∴ $L: y=-2t(x-t)-t^2$

∴ $L: y=-2tx+t^2$ …①

また，(1)より. $D: y=3x^2-6tx+2t^2$ …②

①, ②より, $3x^2-6tx+2t^2-(-2tx+t^2)=0$

∴ $(3x-t)(x-t)=0$ ∴ $x=\frac{t}{3}$, t

∴ 交点は $\left(\frac{t}{3},\ \frac{t^2}{3}\right)$, $(t,\ -t^2)$ //

(3) CとDの交点を求めると, $3x^2-6tx+2t^2-(-x^2)=0$

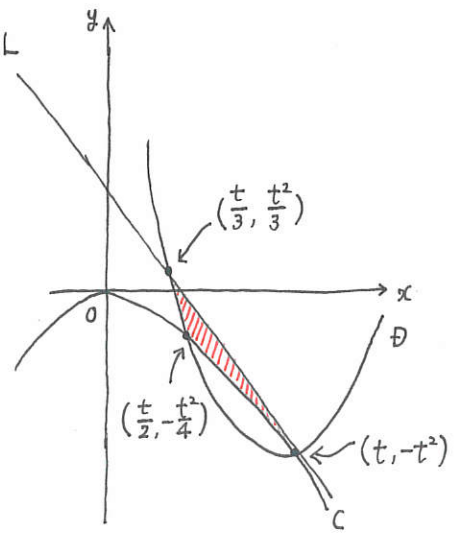
∴ $2(2x-t)(x-t)=0$ ∴ $x=\frac{t}{2}$, t

∴ 交点は $\left(\frac{t}{2},\ -\frac{t^2}{4}\right)$, $(t,\ -t^2)$

$$\therefore S=\int_{\frac{t}{3}}^{\frac{t}{2}} -2tx+t^2-(3x^2-6tx+2t^2)\,dx+\int_{\frac{t}{2}}^{t} -2tx+t^2-(-x^2)\,dx$$

$$=\int_{\frac{t}{3}}^{\frac{t}{2}} -3x^2+4tx-t^2\,dx+\int_{\frac{t}{2}}^{t} x^2-2tx+t^2\,dx$$

$$=\left[-x^3+2tx^2-t^2x\right]_{\frac{t}{3}}^{\frac{t}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-tx^2+t^2x\right]_{\frac{t}{2}}^{t}$$

$$=-\frac{t^3}{8}+\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{2}-\left(-\frac{t^3}{27}+\frac{2}{9}t^3-\frac{t^3}{3}\right)+\frac{t^3}{3}-t^3+t^3-\left(\frac{t^3}{24}-\frac{t^3}{4}+\frac{t^3}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{108}t^3$$ //