

2015年文系第3問

3 関数 $f(x) = x^4 - 5x^3 + kx^2$ が極大値をもつような定数 k の値の範囲を求めなさい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 2kx \\ &= x(4x^2 - 15x + 2k) \end{aligned}$$

ここで、 $g(x) = 4x^2 - 15x + 2k$ とおき、判別式を D とおく

(i) $D < 0$ のとき。

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは、} x = 0 \text{ で、すべての } x \text{ で } g(x) > 0$$

∴ 右の増減表より、極大値なし

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

(ii) $D = 0$ のとき。

$$g(x) = 0 \text{ となるのは、} x = \frac{15}{8}$$

∴ 右の増減表より、極大値なし

x	...	0	...	$\frac{15}{8}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘		↗		↗

(iii) $D > 0$ のとき。

$$f'(x) = 0 \text{ の解を } \alpha, \beta, \gamma \text{ (} \alpha < \beta < \gamma \text{) とおくと、}$$

右の増減表より、極大値をもつ このうち1つは0

x	...	α	...	β	...	γ	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

$$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2k$$

$$= 225 - 32k$$

$$\therefore 225 - 32k > 0 \quad \therefore k < \frac{225}{32}$$

ただし、 $\alpha \neq \beta$ かつ $\beta \neq \gamma$ なので、 $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$

$$\text{以上より、} k < 0, 0 < k < \frac{225}{32}$$

(i) ~ (iii) より、

$$\underline{k < 0, 0 < k < \frac{225}{32}}$$