0002257182477999

和歌山大学

2016年 第2問

数理 石井K

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{a_n+2}{2a_n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また，数列 $\{b_n\}$ は

$$b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．次の問いに答えよ．

(1) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．
(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．
(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $b_n=1-\dfrac{2}{a_n+1}$ より，$\dfrac{2}{a_n+1}=1-b_n$

よって，$\dfrac{a_n+1}{2}=\dfrac{1}{1-b_n}$　　$\therefore\ a_n=\dfrac{1+b_n}{1-b_n}$

$\therefore$ $\{a_n\}$ の漸化式に代入して，

$$\frac{1+b_{n+1}}{1-b_{n+1}}=\frac{\frac{1+b_n}{1-b_n}+2}{2\cdot\frac{1+b_n}{1-b_n}+1}\iff\frac{1+b_{n+1}}{1-b_{n+1}}=\frac{3-b_n}{3+b_n}$$

$$\iff\underline{b_{n+1}=-\frac{1}{3}b_n}\ //$$

(2) $b_1=\dfrac{1}{3}$ と (1) の結果より，$\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列

$\therefore\ b_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　$\therefore\ \underline{b_n=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}\ //$

(3) $b_n=1-\dfrac{2}{a_n+1}$ より，　$1-\dfrac{2}{a_n+1}=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$\therefore\ a_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\underline{\frac{(-3)^n-1}{(-3)^n+1}}\ //$$