0001634635638999

静岡大学

2014年 理（物・化）・工・情報 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)$ と $g(x)$ は x の整式で

$$f(x)-f(0)=4x^3-5x^2+2x,$$
$$(2x-1)\{g(x)-g(0)\}=f(x)+2\int_0^x (x-t)g'(t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt$$

を満たすとする．ただし，$g'(t)$ は $g(t)$ の導関数である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$-\{g(x)-g(0)\}=f(x)-2\int_0^x tg'(t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(x)$ が極小値 $\dfrac{9}{4}$ をとるとき，$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)g'(t)\,dt = x\int_0^x g'(t)\,dt - \int_0^x tg'(t)\,dt$

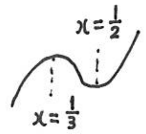
$\displaystyle = x\left[g(t)\right]_0^x - \int_0^x tg'(t)\,dt$

$\displaystyle = xg(x)-xg(0)-\int_0^x tg'(t)\,dt$

$\displaystyle \therefore f(x)+2\left(xg(x)-xg(0)-\int_0^x tg'(t)\,dt\right)+\int_0^2 g(t)\,dt=(2x-1)\{g(x)-g(0)\}$

$\displaystyle \therefore -\{g(x)-g(0)\}=f(x)-2\int_0^x tg'(t)\,dt+\int_0^2 g(t)\,dt$ ■

(2) $\{f(x)-f(0)\}'=12x^2-10x+2$ $\quad\therefore f'(x)=2(2x-1)(3x-1)$



$\therefore f'(x)=0$ となるのは．$x=\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 　極小値をとるのは $x=\frac{1}{2}$

$\therefore f(\frac{1}{2})-f(0)=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+1=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore f(0)=2$ $\quad\therefore \underline{f(x)=4x^3-5x^2+2x+2}$ //

(1) の等式の両辺を x で微分して，$-g'(x)=f'(x)-2xg'(x)$ $\quad\therefore (2x-1)g'(x)=f'(x)$

$f'(x)=2(2x-1)(3x-1)$ より．$g'(x)=6x-2$ $\quad\therefore g(x)=3x^2-2x+C$ とおける．

(1) の式に $x=0$ を代入して．$\displaystyle 0=2+\int_0^2 3t^2-2t+c\,dt$

$\therefore 0=2+\left[t^3-t^2+ct\right]_0^2$ $\quad\therefore 0=2+8-4+2c$ より $c=-3$

$\therefore \underline{g(x)=3x^2-2x-3}$ //