2014年 理（物・化）・工・情報 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $a,\ b,\ c,\ d,\ s,\ t$ を実数とし，$b \neq 0$ とする．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$ は等式

$$AB+BA=(a+d)B$$

を満たすとする．x の2次方程式

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$$

は異なる2つの実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとし，列ベクトル $X=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ は等式 $AX=\alpha X$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) s を行列 A の成分を用いて表せ．

(2) t を $a,\ b,\ \alpha$ を用いて表せ．

(3) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=BX$ とし，$P=\begin{pmatrix} 1 & u \\ t & v \end{pmatrix}$ とするとき，行列 P は逆行列をもち，

$$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たすことを示せ．

(1) $AB=\begin{pmatrix} a+bs & -b \\ c+ds & -d \end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix} a & b \\ as-c & bs-d \end{pmatrix}$　$\therefore AB+BA=\begin{pmatrix} 2a+bs & 0 \\ s(a+d) & bs-2d \end{pmatrix}$

一方，$(a+d)B=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ s(a+d) & -a-d \end{pmatrix}$　∴成分を比較して，

$2a+bs=a+d$，$bs-2d=-a-d$　∴ $b\neq 0$ より，$\underline{s=\dfrac{d-a}{b}}$ //

(2) $AX=\begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha t \end{pmatrix}$　$\therefore \underline{t=\dfrac{\alpha-a}{b}}$ //

(3) $BX=\begin{pmatrix} 1 \\ s-t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$　$\therefore u=1,\ v=s-t=\dfrac{d-\alpha}{b}$　$\therefore \det P=v-ut=\dfrac{a+d-2\alpha}{b}$

ここで，$\alpha=\dfrac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ より．$\det P=\pm\dfrac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{b}\neq 0$（$\because D>0$ より）

∴ P は逆行列 P^{-1} をもつ

$AP=\begin{pmatrix} a+bt & au+vb \\ c+dt & cu+vd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & a+d-\alpha \\ \dfrac{bc-ad+d\alpha}{b} & \dfrac{bc+d^2-\alpha d}{b} \end{pmatrix}$　$P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \dfrac{\alpha^2-a\alpha}{b} & \dfrac{d\beta-\alpha\beta}{b} \end{pmatrix}$

解と係数の関係より．$\alpha+\beta=a+d$，$\alpha\beta=ad-bc$

$\therefore (a+d-\alpha)-\beta=a+d-(\alpha+\beta)=0$

$(bc-ad+d\alpha)-(\alpha^2-a\alpha)=0$

$(bc+d^2-\alpha d)-(d\beta-\alpha\beta)=0$

$\therefore AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ■