0002010909897999

長崎大学

2015年 医学部 第1問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

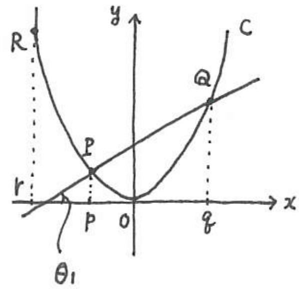
$\boxed{1}$ 放物線 $C : y = x^2$ 上に異なる2点P，Qをとる．P，Qの x 座標をそれぞれ p，q（ただし，$p < q$）とする．直線PQの傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ．

(2) $a = 1$ とする．直線PQと x 軸の正の向きとなす角 θ_1（ただし，$0 < \theta_1 < \pi$）を求めよ．

(3) $a = 1$ とする．放物線 C 上に点Rをとる．Rの x 座標を r（ただし，$r < p$）とする．三角形PQRが正三角形になるとき，直線PRと x 軸の正の向きとのなす角 θ_2（ただし，$0 < \theta_2 < \pi$）を求めよ．また，このとき直線PRの傾き，および直線QRの傾きを，それぞれ求めよ．さらに，正三角形PQRの面積を求めよ．

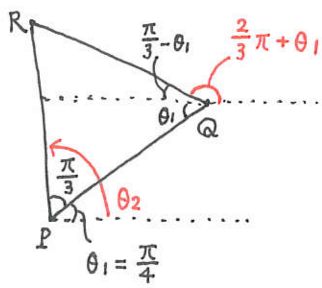
(4) $a = 2$ とする．放物線 C 上に点S(1, 1)をとる．三角形PQSが $\angle S = \frac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ．



(1) $a = \dfrac{q^2 - p^2}{q - p}$　　$\therefore$ $\underline{a = p + q}$ //

(2) $\tan\theta_1 = a = 1$　　$\therefore$ $0 < \theta_1 < \pi$ より，$\underline{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}$ //

(3) 右図より，$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \underline{\frac{7}{12}\pi}$ //



$$
\begin{aligned}
(\text{直線PRの傾き}) &= \tan\theta_2 \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1\cdot\sqrt{3}} \\
&= \underline{-2 - \sqrt{3}} \ //
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{直線QRの傾き}) &= \tan\left(\frac{2}{3}\pi + \theta_1\right) \\
&= \tan\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{-\sqrt{3} + 1}{1 - (-\sqrt{3})\cdot 1} \\
&= \underline{\sqrt{3} - 2} \ //
\end{aligned}
$$

(1)と同様に計算すると，(PRの傾き) $= p + r = -2 - \sqrt{3}$ …①

(QRの傾き) $= q + r = \sqrt{3} - 2$ …②

① − ② より，$p - q = -2\sqrt{3}$　これと $p + q = a = 1$ より，$p = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$，$q = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

2枚目につづく

2015年 医学部 第1問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる2点P，Qをとる．P，Qの x 座標をそれぞれ p，q（ただし，$p<q$）とする．直線PQの傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ．

(2) $a=1$ とする．直線PQと x 軸の正の向きとなす角 θ_1（ただし，$0<\theta_1<\pi$）を求めよ．

(3) $a=1$ とする．放物線 C 上に点Rをとる．Rの x 座標を r（ただし，$r<p$）とする．三角形PQRが正三角形になるとき，直線PRと x 軸の正の向きとのなす角 θ_2（ただし，$0<\theta_2<\pi$）を求めよ．また，このとき直線PRの傾き，および直線QRの傾きを，それぞれ求めよ．さらに，正三角形PQRの面積を求めよ．

(4) $a=2$ とする．放物線 C 上に点S(1, 1)をとる．三角形PQSが $\angle S=\frac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ．

(3) のつづき

$$PQ^2=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2$$
$$=(-2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2$$
$$=24$$

$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot PQ^2\cdot \sin 60^\circ=\underline{6\sqrt{3}}$ //

(4) (1)より．$p+q=a=2$ …③

(SPの傾き) $=p+1$，(SQの傾き) $=q+1$

$SP\perp SQ$ より，$(p+1)(q+1)=-1$

$\therefore pq+p+q+1=-1$ $\therefore pq=-4$ …④

③，④，解と係数の関係より．p，q は．$x^2-2x-4=0$ の解である．

$p<q$ より．$p=1-\sqrt{5}$，$q=1+\sqrt{5}$ $\therefore P(1-\sqrt{5}, 6-2\sqrt{5})$，$Q(1+\sqrt{5}, 6+2\sqrt{5})$

$\therefore SP^2=(-\sqrt{5})^2+(5-2\sqrt{5})^2=50-20\sqrt{5}$

$SQ^2=(\sqrt{5})^2+(5+2\sqrt{5})^2=50+20\sqrt{5}$

$\therefore SP^2\cdot SQ^2=(50-20\sqrt{5})(50+20\sqrt{5})=500$ $\therefore SP\cdot SQ=10\sqrt{5}$

$\therefore \triangle PQS=\frac{1}{2}SP\cdot SQ$

$=\underline{5\sqrt{5}}$ //