0001820729718999

旭川医科大学

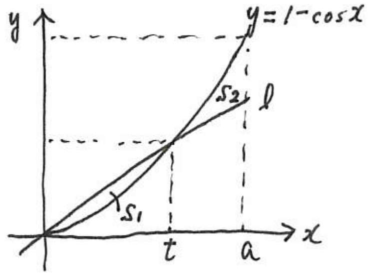
2014年 医学部 第2問

$\boxed{2}$ $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，曲線 $y = 1 - \cos x$ $(0 \leqq x \leqq a)$ を C とする．$0 < t < a$ とし，原点と C 上の点 $(t,\ 1 - \cos t)$ を通る直線を ℓ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ とで囲まれた部分の面積を $S_1(t)$，$t \leqq x \leqq a$ の範囲で C と ℓ と直線 $x = a$ とで囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とおくとき，$S_1(t) + S_2(t)$ を求めよ．

(2) $S_1(t) + S_2(t)$ を最小とする t の値を t_0 とするとき，t_0 を a を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{S_1(t_0) - S_2(t_0)}{a^3}$ を求めよ．ただし，$a - \dfrac{a^3}{3!} < \sin a < a - \dfrac{a^3}{3!} + \dfrac{a^5}{5!}$ $(a > 0)$ は用いてよい．



(1) $S_1(t) + S_2(t)$

$$= \int_0^t \frac{1-\cos t}{t}x - (1-\cos x)\,dx + \int_t^a 1 - \cos x - \frac{1-\cos t}{t}x\,dx$$

$$= \left[\frac{1-\cos t}{2t}x^2 - x + \sin x\right]_0^t + \left[x - \sin x - \frac{1-\cos t}{2t}x^2\right]_t^a$$

$$= \frac{t}{2}(1-\cos t) - t + \sin t + a - \sin a - \frac{1-\cos t}{2t}a^2 - t + \sin t + \frac{t}{2}(1-\cos t)$$

$$= \underline{-t - t\cos t + 2\sin t - \frac{a^2(1-\cos t)}{2t} + a - \sin a}$$ //

(2) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおくと，

$$S'(t) = -1 + \cos t + t\sin t - \frac{a^2 t\sin t - a^2 + a^2\cos t}{2t^2}$$

$$= \frac{2t^2 - a^2}{2t^2}\cdot(t\sin t + \cos t - 1)$$

ここで，$g(t) = t\sin t + \cos t - 1$ とおくと．

$g'(t) = t\cos t$

$\therefore$ $0 < t < \frac{\pi}{2}$ では，$g'(t) > 0$ となり，

$g(t)$ は単調増加 $g(0) = 0$ より，

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ において，$g(t) > 0$

$\therefore$ $S'(t) = 0$ となるのは，

$t = \underline{t_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}}$ //

(3) (1)より，

$$S_1(t_0) = \left[\frac{1-\cos t}{2t}x^2 - x + \sin x\right]_0^{t_0}$$

$$= -\frac{t_0}{2}(1 + \cos t_0) + \sin t_0$$

$S_1(t_0) - S_2(t_0) = 2S_1(t_0) - S(t_0)$

$= -t_0(1 + \cos t_0) + 2\sin t_0$

$+ t_0 + t_0\cos t_0 - 2\sin t_0$

$+ \dfrac{a^2(1-\cos t_0)}{2t_0} - a + \sin a$

$\therefore$ $\underset{T(t_0)\text{とおくと}}{\underbrace{S_1(t_0) - S_2(t_0)}} = \dfrac{a^2(1-\cos t_0)}{2t_0} - a + \sin a$

$$\lim_{a \to +0} \frac{T(t_0)}{a^3} = \lim_{a \to +0} \frac{1-\cos t_0}{2at_0} - \frac{1}{a^2} + \underset{-\frac{1}{6}\text{に収束}}{\underbrace{\frac{\sin a}{a^3}}}$$

$$= \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sin\frac{t_0}{2}}{\frac{t_0}{2}}\right)^2 - \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{6} = \underline{\frac{3\sqrt{2}-4}{24}}$$ //

問題で与えられたはさみうちの式を用いて

紙面のつごうで略しているところあり．