0002121098787999

宮崎大学

2015年 農・教育文化（文系）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 初項 $a_1=0$ と漸化式

$$a_{n+1}=(1-r)r^{n-1}+r^2a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \fallingdotseq 0$，$r \fallingdotseq 1$ とする．

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ．

(1) $a_2=(1-r)r^0+r^2\cdot 0=1-r$

$a_3=(1-r)r+r^2\cdot(1-r)=r-r^3$

$a_4=(1-r)r^2+r^2\cdot(r-r^3)=r^2-r^5$

以上より，$\underline{a_2=1-r,\ a_3=r-r^3,\ a_4=r^2-r^5}$ //

(2) (1)より，$a_n=r^{n-2}-r^{2n-3}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．

$a_1=r^{-1}-r^{-1}=0$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$a_k=r^{k-2}-r^{2k-3}$

$\therefore a_{k+1}=(1-r)r^{k-1}+r^2(r^{k-2}-r^{2k-3})$

$=r^{k-1}-r^{2k-1}$

$=r^{(k+1)-2}-r^{2(k+1)-3}$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成立する．

(i)，(ii)より，すべての自然数 n について，$a_n=r^{n-2}-r^{2n-3}$ が成り立つ ▨

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} r^{k-2}-\sum_{k=1}^{n} r^{2k-3}$

$$=\frac{\frac{1}{r}(1-r^n)}{1-r}-\frac{\frac{1}{r}(1-r^{2n})}{1-r^2}$$

$$=\underline{\frac{(1-r^{n-1})(1-r^n)}{(1-r)(1+r)}}$$ //