2014年 第4問

$\boxed{4}$ 1個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う．景品はAとBの2種類あり，次の規則にしたがって景品をもらえるとする．

- 出た目の数が6のときは，景品Aをもらえる．
- 出た目の数が4，5のときは，景品Bをもらえる．
- 出た目の数が1，2，3のときは，景品はもらえない．
- 景品Aと景品Bの2種類とももらうことができたらゲームは終了する．

ちょうど n 回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_2 の値を求めよ．

(2) n を2以上の整数とする．p_n を n を用いて表せ．

(3) n を2以上の整数とする．不等式

$$p_{n+1}-p_n<\frac{2}{3}(p_n-p_{n-1})$$

を示せ．ただし，$p_1=0$ とする．

(1) (4, 6), (5, 6), (6, 4), (6, 5) の4通りなので $p_2=\frac{4}{6^2}=\underline{\frac{1}{9}}$ //

(2) $n-1$ 回目までにBが少なくとも1回出て，n 回目にAが出る確率は，$\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

〃　A　〃　B $=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$$\therefore\ p_n=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\underline{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\ // \quad (n\geqq 2)$$

(3) $(\text{右辺})-(\text{左辺})=\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}-\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$$-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{180}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$>0$$

$\therefore$ (与式)が成り立つ