

2011年理系第4問

4 N, a, b は正の整数とする. 箱の中に赤玉が a 個, 白玉が b 個入っている. 箱から無作為に 1 個の玉を取り出し, 色を記録して箱に戻す. この操作を繰り返し, 同じ色の玉が 2 回続けて出るか, または取り出す回数が $2N + 2$ になったら終了する. n 回取り出して終わる確率を $P(n)$ とし, $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$, $r = pq$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $P(2j), P(2j+1)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) および $P(2N+2)$ を r を用いて表せ.

(2) $(1-r) \sum_{j=1}^N jr^{j-1} = \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N$ を示せ.

(3) 取り出す回数の期待値 $m = \sum_{n=2}^{2N+2} nP(n)$ について, $m < \frac{2+r}{1-r}$ となることを示せ.

(4) 上の期待値 m について, $m < 3$ を示せ.