広島大学

2015年 理系 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ m, nを自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $m \geqq 2$, $n \geqq 2$とする．異なるm種類の文字から重複を許してn個を選び，1列に並べる．このとき，ちょうど2種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(2) $n \geqq 3$とする．3種類の文字a, b, cから重複を許してn個を選び，1列に並べる．このときa, b, cすべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(3) $n \geqq 3$とする．n人を最大3組までグループ分けする．このときできたグループ数が2である確率p_nを求めよ．ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする．
たとえば，$n=3$のとき，A，B，Cの3人をグループ分けする方法は
{(A, B, C)}, {(A, B), (C)}, {(A, C), (B)}
{(B, C), (A)}, {(A), (B), (C)}
の5通りあるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$である．

(4) (3)の確率p_nが$\dfrac{1}{3}$以下となるようなnの範囲を求めよ．

(1) 使う2種類の文字の選び方が ${}_mC_2$ 通り．n文字の並びのうち．各桁について
2通りの選び方ができるので，${}_mC_2 \times (2^n - 2) = \underline{m(m-1)(2^{n-1}-1)}$ 通り //

1種類のみになるときを引く

(2) (1)において $m=3$ を代入すると．2種類の文字からなるのは．$6\cdot(2^{n-1}-1)$通り
1種類のみからなるのは 3通り．
∴すべての文字を含むのは．$3^n - 6\cdot(2^{n-1}-1) - 3 = \underline{3^n - 3\cdot 2^n + 3}$ 通り //

(3) グループ数が1であるのは．1通り．
グループ数が2であるのは．$\dfrac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1$ 通り
グループ数が3であるのは (2)より．$\dfrac{3^n - 3\cdot 2^n + 3}{3!} = \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$ 通り

$$\therefore p_n = \frac{2^{n-1}-1}{1 + 2^{n-1} - 1 + \frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}} = \underline{\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1}} \text{ //}$$

(4) $\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1} \leqq \dfrac{1}{3} \iff 3\cdot 2^n - 3^{n-1} \leqq 7$

単調減少．

$n=5$のとき．(左辺) = 15
$n=6$のとき．(左辺) = −51
∴ $n \geqq 3$と合わせて．$\underline{n \geqq 6}$ //