香川大学

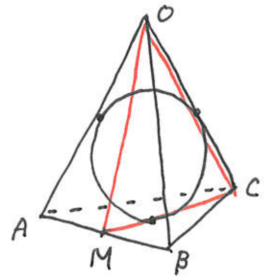
2014年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 一辺の長さが x の正三角形 ABC を底面，点 O を頂点とし，OA = OB = OC である三角錐 OABC に半径 1 の球が内接しているとする．ただし，球が三角錐に内接するとは，球が三角錐のすべての面に接することである．このとき，次の問に答えよ．

(1) 三角錐 OABC の体積を x を用いて表せ．

(2) この体積の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

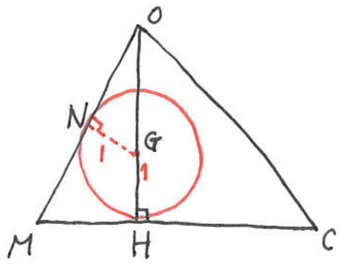


(1) 線分ABの中点をMとし，O, M, C を通る平面で切った断面を考える．

また，OからΔABCに下ろした垂線とΔABCの交点をHとする

このとき，$OH = h$ とおく　HはΔABCの重心となるので

$CH : HM = 2 : 1$，$CM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ より，$HM = \frac{\sqrt{3}}{6}x$



また，球の中心をG，球とΔOABの接点をNとおくと

$\triangle ONG \backsim \triangle OHM$ より　$OG : GN = OM : HM$

$\therefore (h-1) : 1 = OM : \frac{\sqrt{3}}{6}x$　…①

ここでΔOMHにおいて，三平方の定理より　$OM^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2 + h^2$ …②

①より，$OM^2 = \frac{x^2}{12}(h-1)^2$　これに②を代入して，整理すると，

$h\{(x^2-12)h - 2x^2\} = 0$　$h > 0$ より，$h = \frac{2x^2}{x^2-12}$

$\therefore V = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{2x^2}{x^2-12} \cdot \frac{1}{3}$　　$\therefore \underline{V = \frac{\sqrt{3}x^4}{6(x^2-12)}}$ //

(2) $t = x^2 - 12$ $(t > 0)$ とおくと，

(1)より　$V = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(t + \frac{144}{t} + 24\right)$

ここで，相加平均・相乗平均の関係より，$t + \frac{144}{t} \geqq 2 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{144}{t}} = 24$

$\therefore V \geqq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 48 = 8\sqrt{3}$　等号成立は $t = \frac{144}{t} \Leftrightarrow t = 12 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{6}$

$\therefore$ <u>体積の最小値は $8\sqrt{3}$ ($x = 2\sqrt{6}$ のとき)</u> //