0002083096197999

茨城大学

2015年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $f(x)=2xe^{-x}$ とおく．ただし，e は自然対数の底とする．以下の各問に答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(2) 正の実数 a に対して，$I_a=\int_0^1 xe^{-ax}\,dx$，$J_a=\int_0^1 x^2e^{-ax}\,dx$ とおく．J_a を I_a と a を用いて表せ．

(3) 定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ および $\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$ を求めよ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ と，3直線 $x=0$，$x=1$ および $y=t$ で囲まれた図形を，直線 $y=t$ を軸として1回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする．t を動かしたとき，$V(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

(1) $f'(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}=2e^{-x}(1-x)$

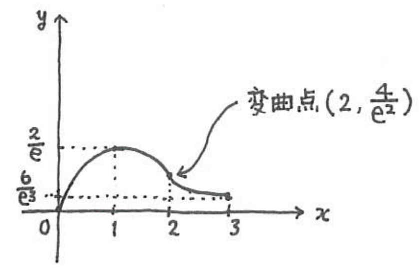
$f''(x)=-2e^{-x}(1-x)-2e^{-x}=-2(2-x)e^{-x}$

右の増減表より，

極大値 $\frac{2}{e}$ ($x=1$ のとき)，変曲点 $\left(2,\ \frac{4}{e^2}\right)$ //

x	0	…	1	…	2	…	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{6}{e^3}$

∴ グラフは右のようになる．



(2) $J_a=\int_0^1 x^2\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'dx$

$=\left[-\frac{x^2}{a}e^{-ax}\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{2x}{a}e^{-ax}\,dx$

$=-\frac{1}{a}e^{-a}+\frac{2}{a}\int_0^1 xe^{-ax}\,dx$

$=\frac{1}{a}(2I_a-e^{-a})$ //

(3) $\int_0^1 f(x)\,dx=2I_1$ であり，$I_a=\int_0^1 x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'dx=\left[-\frac{x}{a}e^{-ax}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{a}e^{-ax}\,dx$

∴ $I_a=-\frac{1}{a}e^{-a}+\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^1$　∴ $I_a=\frac{1}{a^2}\{1-(a+1)e^{-a}\}$　∴ $I_1=1-\frac{2}{e}$

∴ $\int_0^1 f(x)\,dx=2I_1=2-\frac{4}{e}$ //　$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=4J_2$

(2)より，$4J_2=\frac{4}{2}(2I_2-e^{-2})=1-\frac{5}{e^2}$　∴ $\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1-\frac{5}{e^2}$ //

(4) $V(t)$ が最小となるのは明らかに $0<t<\frac{2}{e}$ のときであり，このとき回転体は右のように2つの部分からなる．(3)より

t の2次関数

$V(t)=\pi\int_0^1\{f(x)-t\}^2dx=\pi\left\{t^2-4\left(1-\frac{2}{e}\right)t+1-\frac{5}{e^2}\right\}=\pi\left\{\left(t-2\left(1-\frac{2}{e}\right)\right)^2+\frac{16}{e}-\frac{21}{e^2}-3\right\}$

∴ $V(t)$ は $t=2-\frac{4}{e}$ のとき，最小値 $\pi\left(\frac{16}{e}-\frac{21}{e^2}-3\right)$ をとる //