



2016年理学部(数)第3問

3 次の各問に答えよ。

- (1) $x > 1$ のとき $\log x < 2\sqrt{x} - 2$ を示し、これを用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ。ただし、 \log は自然対数を表す。
- (2) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形をかけ。
- (3) 定積分 I_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下で定義する。

$$I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^{n-1}}{x^2} dx$$

ただし、 e は自然対数の底である。このとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (*)$$

- (4) 等式(*)を用いて、関数 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x = e$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。