山形大学

2013年 人文学部 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

2 座標平面上に原点Oとは異なる2点P，Qがあり，位置ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は垂直であるとする．$\vec{a}=\sqrt{5}\vec{p}-2\vec{q}$，$\vec{b}=2\sqrt{5}\vec{p}+\vec{q}$ とおく．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|}$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}$ の値を求めよ．

(4) 点Pが放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあり，点Qが円 $x^2+y^2=15$ 上にあるとき，$\vec{p}$，$\vec{q}$ の成分を求めよ．

(1) $\vec{p}\perp\vec{q}$ より，$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

$\therefore |\vec{a}|^2=5|\vec{p}|^2-4\sqrt{5}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2$

$=5|\vec{p}|^2+4|\vec{q}|^2$

$\therefore \underline{|\vec{a}|=\sqrt{5|\vec{p}|^2+4|\vec{q}|^2}}$ //

同様に，$|\vec{b}|^2=20|\vec{p}|^2+4\sqrt{5}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

$=20|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2$

$\therefore \underline{|\vec{b}|=\sqrt{20|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2}}$ //

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$

$\therefore$ (1)より，$5|\vec{p}|^2+4|\vec{q}|^2=20|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2$

$\therefore |\vec{q}|^2=5|\vec{p}|^2$

$\therefore |\vec{q}|=\sqrt{5}|\vec{p}|$

$\therefore \underline{\dfrac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ //

(3) $\vec{a}+\vec{b}=3\sqrt{5}\vec{p}-\vec{q}$　$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|^2=45|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2=50|\vec{p}|^2$　$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}|\vec{p}|$

$\vec{a}-\vec{b}=-\sqrt{5}\vec{p}-3\vec{q}$　$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=5|\vec{p}|^2+9|\vec{q}|^2=50|\vec{p}|^2$　$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=5\sqrt{2}|\vec{p}|$

$\therefore \underline{\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=1}$ //

山形大学

2013年 人文学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上に原点Oとは異なる2点P，Qがあり，位置ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ と $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$ は垂直であるとする．$\vec{a}=\sqrt{5}\vec{p}-2\vec{q}$，$\vec{b}=2\sqrt{5}\vec{p}+\vec{q}$ とおく．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|}$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}$ の値を求めよ．

(4) 点Pが放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあり，点Qが円 $x^2+y^2=15$ 上にあるとき，$\vec{p}$，$\vec{q}$ の成分を求めよ．

(4) 点Qが $x^2+y^2=15$ 上にあることより，$|\vec{q}|=\sqrt{15}$

(2)より，$|\vec{p}|=\sqrt{3}$

ここで，$\vec{p}=\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ とおくと，$|\vec{p}|=\sqrt{t^2+\frac{1}{4}t^4}$

$|\vec{p}|^2=3$ より，$t^2+\frac{1}{4}t^4=3$

$\therefore (t^2+6)(t^2-2)=0$　　$\therefore t=\pm\sqrt{2}$

(i) $t=\sqrt{2}$ のとき，

$\vec{p}=(\sqrt{2}, 1)$，$\vec{q}=(\sqrt{15}\cos\theta, \sqrt{15}\sin\theta)$ とおくと．

$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ より．　$\sqrt{30}\cos\theta+\sqrt{15}\sin\theta=0$　　$\therefore \tan\theta=-\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\theta=\mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　（複号同順）

(ii) $t=-\sqrt{2}$ のとき

$\vec{p}=(-\sqrt{2}, 1)$，$\vec{q}=(\sqrt{15}\cos\theta, \sqrt{15}\sin\theta)$ とおくと．

$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ より．　$-\sqrt{30}\cos\theta+\sqrt{15}\sin\theta=0$　　$\therefore \tan\theta=\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　（複号同順）

(i)，(ii)より．$\vec{p}=(\sqrt{2}, 1)$，$\vec{q}=(\sqrt{5}, -\sqrt{10})$ または $\vec{p}=(\sqrt{2}, 1)$，$\vec{q}=(-\sqrt{5}, \sqrt{10})$

または，$\vec{p}=(-\sqrt{2}, 1)$，$\vec{q}=(\sqrt{5}, \sqrt{10})$ または．$\vec{p}=(-\sqrt{2}, 1)$，$\vec{q}=(-\sqrt{5}, -\sqrt{10})$

―― //