

2015年薬学部第3問

3 自然数 n に対して、0 以上の実数を定義域とする x の関数 $R_n(x)$ を

$$R_n(x) = \frac{1}{1+x^p} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x^p)^k$$

とする。ただし、 p は正の定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| < \frac{1}{pn+1}$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{pk+1}$$

(3) 以上の結果を利用して次の無限級数の和を求めよ。

(i) $S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

(ii) $S_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$