信州大学

2015年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ aは実数とする．xについての2次方程式 $x^2+2ax+3a^2-2a-4=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の問いに答えよ．ただし，重解をもつときは $\alpha=\beta$ とする．

(1) α，β がともに実数になるような a の値の範囲を求めよ．

(2) a が(1)で求めた範囲にあるとき，$\alpha^3+\beta^3$ の最大値を求めよ．

(1) 判別式を D とすると，$D \geqq 0$ より．

$$\frac{D}{4} = a^2-(3a^2-2a-4) \geqq 0$$

$$\therefore\ 2a^2-2a-4 \leqq 0$$

$$\therefore\ a^2-a-2 \leqq 0$$

$$(a-2)(a+1) \leqq 0 \qquad \therefore\ \underline{-1 \leqq a \leqq 2}$$ //

(2) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=3a^2-2a-4$

$$\therefore\ \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$= (-2a)^3-3\cdot(-2a)\cdot(3a^2-2a-4)$$

$$= -8a^3+6a(3a^2-2a-4)$$

$$= 10a^3-12a^2-24a$$

これを $f(a)$ とおくと，$f'(a) = 30a^2-24a-24$

$$= 6(5a^2-4a-4)$$

$\therefore\ f'(a)=0$ となる a は．$a=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}}{5}$

これらはともに $-1 \leqq a \leqq 2$ をみたす

$a_1=\dfrac{2-2\sqrt{6}}{5}$，$a_2=\dfrac{2+2\sqrt{6}}{5}$ とおくと．

a	-1	$\cdots$	a_1	$\cdots$	a_2	$\cdots$	2
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	2	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	-16

$5a_1^2-4a_1-4=0$ を使って，$f(a_1)$ を計算すると．

$$f(a_1) = 2a_1(5a_1^2-4a_1-4)-4a_1^2-16a_1$$

$$= -\frac{4}{5}(5a_1^2-4a_1-4)-\frac{96}{5}a_1-\frac{16}{5}$$

$$= \underline{\frac{16}{25}(12\sqrt{6}-17)}$$ //　← これは $f(2)=-16$ より大