信州大学

2013年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $0 \leqq t \leqq 1$ とする．関数 $f(t)=\int_0^1 |\sqrt{x}-t|\,dx+t^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ を t の多項式で表せ．

(2) $f(t)$ の最小値を求めよ．

(1) $0 \leqq x \leqq t^2$ のとき，$\sqrt{x}-t \leqq 0$，$t^2 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\sqrt{x}-t \geqq 0$

$$\therefore f(t)=\int_0^{t^2} -\sqrt{x}+t\,dx+\int_{t^2}^{1} \sqrt{x}-t\,dx+t^2$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+tx\right]_0^{t^2}+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-tx\right]_{t^2}^{1}+t^2$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+t^3+\frac{2}{3}-t-\frac{2}{3}t^3+t^3+t^2$$

$$=\underline{\frac{2}{3}t^3+t^2-t+\frac{2}{3}}\ /\!/$$

(2) (1)より，$f'(t)=2t^2+2t-1$

$\therefore f'(t)=0$ となる $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の t は，

$$t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\ (=\alpha \text{ とおく})$$

$\therefore$ 増減表は右のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	↘		↗	$\frac{4}{3}$

$f'(\alpha)=2\alpha^2+2\alpha-1=0$ より，$\alpha^2=-\alpha+\frac{1}{2}$ これを使って $f(\alpha)$ の次数を下げていく

$$\therefore f(\alpha)=\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2-\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\alpha\cdot\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)+\alpha^2-\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=-\alpha+\frac{5}{6}$$

$$=\frac{8-3\sqrt{3}}{6}$$

$\therefore f(t)$ の最小値は，$\underline{f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8-3\sqrt{3}}{6}}\ /\!/$