

2016年理系第3問

3 a は正の数とし、次の関数 $y = f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x) = axe^{-\frac{x}{a}} \quad (x \geq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) a が区間 $1 \leq a \leq 2$ 全体を動くとき、点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。
- (3) $x \geq 0$ における曲線 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ と (2) の曲線 C の3曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad f'_a(x) &= (ax)'e^{-\frac{x}{a}} + ax(e^{-\frac{x}{a}})' \\ &= (a-x)e^{-\frac{x}{a}} \\ f''_a(x) &= (a-x)'e^{-\frac{x}{a}} + (a-x)(e^{-\frac{x}{a}})' \\ &= \left(\frac{x}{a} - 2\right)e^{-\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

よって、 $f''_a(2a) = 0$, $f'_a(2a) = -ae^{-2} < 0$ よって、 $P(2a, 2a^2e^{-2})$..

(2) (1) より増減表は次のようになる

x	0	...	a	...	$2a$...
$f'_a(x)$	+	+	0	-	-	-
$f''_a(x)$	-	-	-	-	0	+
$f_a(x)$	0	↗	$\frac{a^2}{e}$	↘	$\frac{2a^2}{e^2}$	↘

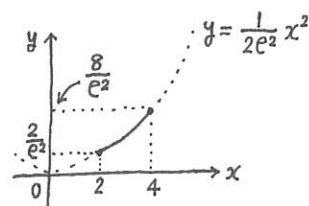
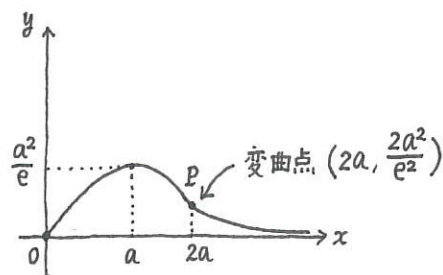
極大

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$ より右のようになる。

$P(x, Y)$ とおくと (1) より、 $X = 2a$, $Y = 2a^2e^{-2}$

$1 \leq a \leq 2$ より、 $2 \leq X \leq 4$ で a を消去して、 $Y = \frac{1}{2e^2} X^2$

∴ C の概形は右図の実線部分 (端点を含ま)



(3) 右図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}} dx - \int_0^2 xe^{-x} dx - \int_2^4 \frac{1}{2e^2} x^2 dx \\ &= [-4xe^{-\frac{x}{2}}]_0^4 - \int_0^4 -4e^{-\frac{x}{2}} dx - [-xe^{-x}]_0^2 + \int_0^2 -e^{-x} dx - \left[\frac{x^3}{6e^2}\right]_2^4 \\ &= -16e^{-2} - [8e^{-\frac{x}{2}}]_0^4 + 2e^{-2} + [e^{-x}]_0^2 - \frac{32}{3}e^{-2} + \frac{4}{3}e^{-2} \\ &= 7 - \frac{91}{3e^2} \end{aligned}$$

