0002108631987999

島根大学

2015年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $(2,\ 0)$ の距離が，点Pと直線 $x=1$ の距離の $\sqrt{2}$ 倍と等しくなるような点Pの描く曲線を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の方程式を求めよ．

(2) t を0でない実数とし，曲線 C と直線 $x+y=t$ との交点をQとする．点Qの座標を t を用いて表せ．

(3) (2)で求めた点Qから x 軸に下ろした垂線をQHとする．t が $2 \leqq t \leqq 4$ の範囲を動くとき，線分QHが通過してできる図形の面積を求めよ．

(1) 点Pと点(2, 0)のキョリは $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，点Pと $x=1$ のキョリは $|x-1|$

よって，$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{2}\,|x-1|$

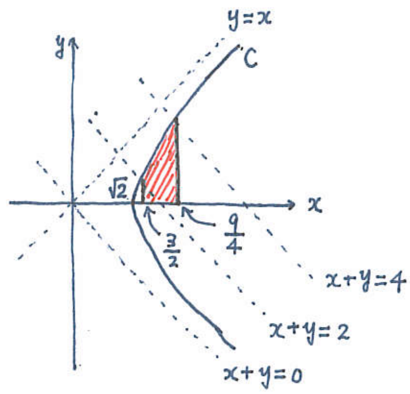
両辺を2乗して，$x^2-4x+4+y^2=2x^2-4x+2$

∴ 曲線Cの方程式は $\underline{x^2-y^2=2}$ //

(2) (1)で求めた式に $y=t-x$ を代入して，

$x^2-(t-x)^2=2$　∴ $x=\dfrac{t^2+2}{2t}$　このとき，$y=\dfrac{t^2-2}{2t}$　∴ $\underline{\mathrm{Q}\left(\dfrac{t^2+2}{2t},\ \dfrac{t^2-2}{2t}\right)}$ //

(3) 右のグラフより，求める面積をSとすると，



$$S=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} y\,dx$$

$$=\int_2^4 \frac{t^2-2}{2t}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

ここで，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot 2t-(t^2+2)\cdot 2}{4t^2}$$

$$=\frac{t^2-2}{2t^2}$$

$$\therefore S=\int_2^4 \frac{t^2-2}{2t}\cdot\frac{t^2-2}{2t^2}\cdot dt$$

$$=\int_2^4 \frac{t}{4}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{8}-\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_2^4$$

$$=\underline{\frac{51}{32}-\log 2}\ //$$