

2014年 理学部 第1問

数理
石井

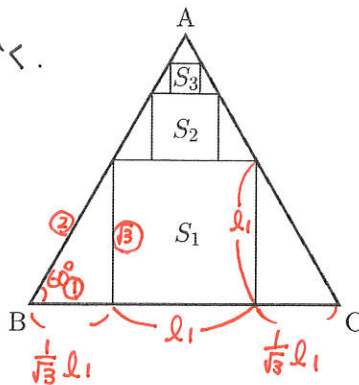
1 1辺の長さが1の正三角形ABCに、図のように正方形 S_1, S_2, S_3, \dots を順に内接させるものとする。

(1) S_n の1辺の長さを l_n とおく。

右図より。

$$l_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}l_1 = 1$$

$$\therefore l_1 = 2\sqrt{3} - 3 //$$



(1) 正方形 S_1 の1辺の長さを求めよ。

(2) n 番目の正方形 S_n の面積 s_n を求めよ。

(3) これらの正方形の面積の総和

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$$

を求めよ。

(2) (1)と同様にすると。

$$l_{n+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}l_{n+1} = l_n$$

$$\therefore l_{n+1} = (2\sqrt{3} - 3)l_n$$

$\therefore \{l_n\}$ は初項 $2\sqrt{3} - 3$ 、公比 $2\sqrt{3} - 3$ の等比数列となる。 $\therefore l_n = (2\sqrt{3} - 3)^n$

$$\therefore s_n = l_n^2 = (2\sqrt{3} - 3)^{2n} //$$

(3)

$$s = (2\sqrt{3} - 3)^2 + (2\sqrt{3} - 3)^4 + \dots$$

$$0 < 2\sqrt{3} - 3 < 1 \quad \text{より} \quad 0 < (2\sqrt{3} - 3)^2 < 1$$

$$s = \frac{(2\sqrt{3} - 3)^2}{1 - (2\sqrt{3} - 3)^2}$$

$$= \frac{21 - 12\sqrt{3}}{12\sqrt{3} - 20}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{8} //$$