0000561188349999

島根大学

2012年 医学部 第1問

数理 石井K

1 直線上に $n+1$ 個の点 P_0, P_1, P_2, …, P_n がこの順に並んでいて，隣り合う2点間の距離

P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, …, $P_{n-1}P_n$

がそれぞれ $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …, $\frac{1}{n}$ となっている．この $n+1$ 個の点から，同様の確からしさで異なる2点を選び，その距離を d とする．このとき，d の期待値を求めよ．

2点の選び方は ${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ 通りある．

キョリ d の期待値を $E(d)$ で表す．

キョリ $\underset{(=1)}{P_0P_1}$ が含まれるのは，$(P_0, P_1), (P_0, P_2), \cdots, (P_0, P_n)$ の n 通り

$\underset{(=\frac{1}{2})}{P_1P_2}$ が含まれるのは，$(P_1, P_2), (P_1, P_3), \cdots, (P_1, P_n)$,

$(P_0, P_2), (P_0, P_3), \cdots, (P_0, P_n)$ の $2\cdot(n-1)$ 通り．

同様に，長さ $\frac{1}{k}$ の $\underbrace{\text{キョリ}}_{P_{k-1}P_k}$ が含まれるのは，

$(P_{k-1}, P_k), \cdots, (P_{k-1}, P_n)$

$(P_{k-2}, P_k), \cdots, (P_{k-2}, P_n)$

$\vdots \qquad \vdots$

$(P_0, P_k) \cdots (P_0, P_n)$

の $k(n-k+1)$ 通り

$$\therefore E(d) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\cdot(n-k+1)\cdot\frac{1}{k}$$

$P_{k-1}P_k$ の長さ．

$$= \frac{2}{n(n+1)}\cdot\left\{ n(n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \right\}$$

$$= 1$$