0002108901987999

島根大学

2015 年 総合理工（数理・情報システム以外） 第 3 問

数理 石井K

3 次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $1+x<e^x$ を示せ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} ne^{-n^2}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (2x^2-1)e^{-x^2}\,dx$ を求めよ．

(1) $f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと．

$f'(x)=e^x-1$

∴ $x>0$ のとき $f'(x)>0$ となり，$f(x)$：単調増加

∴ $f(x)>f(0)=0$　　∴ $1+x<e^x$ が成り立つ ▨

(2) (1) より．$x>0$ のとき．

$0<e^{-x}<\frac{1}{1+x}$

∴ $n>0$ のとき．$0<e^{-n^2}<\frac{1}{1+n^2}$

∴ $0<ne^{-n^2}<\frac{n}{1+n^2}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2}}=0$ より．はさみうちの原理から $\underline{\lim_{n\to\infty} ne^{-n^2}=0}$ //

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1}$

(3) $(2x^2-1)e^{-x^2}$ は偶関数なので

$\int_{-n}^{n}(2x^2-1)e^{-x^2}dx=2\int_0^n(2x^2-1)e^{-x^2}dx$

ここで，$\int_0^n 2x^2e^{-x^2}dx=\int_0^n -x(e^{-x^2})'dx$

$=\left[-xe^{-x^2}\right]_0^n+\int_0^n e^{-x^2}dx$

$=-ne^{-n^2}+\underline{\int_0^n e^{-x^2}dx}$ 移項する．

∴ $\int_0^n(2x^2-1)e^{-x^2}dx=-ne^{-n^2}$

∴ (与式) $=2\lim_{n\to\infty}-ne^{-n^2}=\underline{0}$ //　(∵ (2) より)