0002108451987999

島根大学

2015年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ xy 平面上に原点Oと2点A，Bがある．$\overrightarrow{OA}$ の大きさを3，$\overrightarrow{OB}$ の大きさを4とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が $\dfrac{2\pi}{3}$ であるとき，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ の大きさを求めよ．

(2) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあり，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ をみたすとする．$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が 4α であるとき，$\triangle$OABの面積を求めよ．

(3) 点E(1, 0)に対し，

$$4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-12\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

が成り立つとき，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\frac{2\pi}{3}$

$=3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-6$

$\therefore |\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2$

$=3^2+4\cdot(-6)+4\cdot4^2$

$=49$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=7}$ //

(2) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ で，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より．

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{7}{8}$

$\therefore \sin4\alpha=2\sin2\alpha\cos2\alpha$

$=\frac{7\sqrt{15}}{32}$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\sin4\alpha$

$=\underline{\frac{21\sqrt{15}}{16}}$ //

(3) $|\overrightarrow{OA}|=3$ より．$\overrightarrow{OA}=(3\cos\beta,\ 3\sin\beta)$

$|\overrightarrow{OB}|=4$ より．$\overrightarrow{OB}=(4\cos\gamma,\ 4\sin\gamma)$ と表せる．

$\therefore$ 与えられた式に代入して．$4(3\cos\beta,3\sin\beta)+3(4\cos\gamma,4\sin\gamma)-12(1,0)=(0,0)$

$$\therefore \begin{cases}\cos\beta+\cos\gamma=1 & \cdots①\\ \sin\beta+\sin\gamma=0 & \cdots②\end{cases}$$

①，② より．$\cos\gamma=1-\cos\beta$，$\sin\gamma=-\sin\beta$ $\quad\therefore \cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$ より

$1-2\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ $\quad\therefore \cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$

② に注意して．$\underline{\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ \overrightarrow{OB}=(2,-2\sqrt{3})\ \text{または}\ \overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ \overrightarrow{OB}=(2,2\sqrt{3})}$ //