



2014年 総合理工（数理・情報システム）第1問

1 3つの箱  $X, Y, Z$  と3つの玉  $a, b, c$  があり、1つの箱には1つの玉が入るとする。箱  $X$  には  $a$  が、箱  $Y$  には  $b$  が、箱  $Z$  には  $c$  が入っている状態から始めて、次の操作を繰り返し行う。

「数字  $1, 2, 3, 4, 5$  の中から無作為に1つの数字  $m$  を選ぶ。  $m = 1$  ならば、箱  $Y, Z$  にある玉をそれぞれ箱  $Z, Y$  に移す。  $m = 2$  ならば、箱  $X, Z$  にある玉をそれぞれ箱  $Z, X$  に移す。  $m = 3$  ならば、箱  $X, Y$  にある玉をそれぞれ箱  $Y, X$  に移す。  $m = 4$  ならば、箱  $X, Y, Z$  にある玉をそれぞれ箱  $Y, Z, X$  に移す。  $m = 5$  ならば、箱  $X, Y, Z$  にある玉をそれぞれ箱  $Z, X, Y$  に移す。」

この操作を  $n$  回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を  $p_n$  とする。箱  $X, Y, Z$  にそれぞれ玉  $x, y, z$  が入っている状態を  $(x, y, z)$  と表す。たとえば、最初の状態は  $(a, b, c)$  である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ、 $p_1, p_2$  を求めよ。
- (2)  $n$  回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態  $(a, b, c)$  となっていない確率を  $q_n$  とする。 $n \geq 1$  のとき、 $p_{n+1} = \frac{1}{5}q_n$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $p_n$  を求めよ。