0001889900118999

大阪薬科大学

2012年 薬学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えなさい．多項式 $P(x)=(1+x)^{24}$ を考える．

(1) $P(x)$ の x^2 の係数は $\boxed{\text{E}}$ である．

(2) ${}_{24}C_0-{}_{24}C_1+{}_{24}C_2-{}_{24}C_3+\cdots+{}_{24}C_{22}-{}_{24}C_{23}+{}_{24}C_{24}=\boxed{\text{F}}$ である．

(3) $Q(x)=\dfrac{1}{2}(P(x)+P(-x))$ とする．このとき，$Q(x)$ は $P(x)$ の
{（ア）奇数次数の項からなる．　（イ）偶数次数の項からなる．　（ウ）奇数次数と偶数次数の項からなる．}
（ア），（イ），（ウ）の中から最も適切なものを選び，その記号を $\boxed{\text{G}}$ に記しなさい．

(4) 方程式 $x^3=1$ の3つの解を1，α，β とする．

（i）$(1-\alpha)^6=\boxed{\text{H}}$ である．

（ii）$\alpha^2-\beta=\boxed{\text{I}}$ である．

（iii）$\displaystyle\sum_{k=0}^{12}{}_{24}C_{2k}\beta^k$ の値を $\boxed{\text{い}}$ で求めなさい．
なお，必要ならば $3^{12}=531441$ を使ってよい．

(1) 二項定理より，x^2 の項は

$1^{22}\cdot x^2\cdot{}_{24}C_2=276x^2$

$\therefore\ 276$

(2) 二項定理より

$(1+x)^{24}={}_{24}C_0x^0+{}_{24}C_1x^1+\cdots+{}_{24}C_{24}x^{24}$

これに $x=-1$ を代入すると，

${}_{24}C_0-{}_{24}C_1+\cdots+{}_{24}C_{24}=0$

(3) (2)の式より．

$P(x)={}_{24}C_0x^0+{}_{24}C_1x^1+{}_{24}C_2x^2+\cdots$

$+\ P(-x)={}_{24}C_0\cdot(-x)^0+{}_{24}C_1(-x)^1+{}_{24}C_2(-x)^2+\cdots$

$P(x)+P(-x)=2\cdot{}_{24}C_0+2\cdot{}_{24}C_2x^2+\cdots$ となり，偶数次数の項からなる $\therefore$ (イ)

(4) $\alpha^3=1$ より．$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$　$\alpha\neq1$ より．$\alpha^2+\alpha+1=0$ → $\alpha+\alpha^2=-1$

(i)

$(1-\alpha)^6=1-{}_6C_1\alpha+{}_6C_2\alpha^2-{}_6C_3\alpha^3+{}_6C_4\alpha^4-{}_6C_5\alpha^5+{}_6C_6\alpha^6$

$=1-6\alpha+15\alpha^2-20+15\alpha-6\alpha^2+1$

$=2-6(\alpha+\alpha^2)+15(\alpha+\alpha^2)-20$

$=-27$

(ii) 解と係数の関係より．$\alpha\beta=1$　$\therefore\ \beta=\dfrac{1}{\alpha}=\alpha^2$　$\therefore\ \alpha^2-\beta=0$

(iii) (3)と(ii)より．（与式）$=\displaystyle\sum_{k=0}^{12}{}_{24}C_{2k}\,\alpha^{2k}$

$=\dfrac{1}{2}(P(\alpha)+P(-\alpha))$

$=\dfrac{1}{2}(3^{12}+1)$

$=265721$

(i)より $P(-\alpha)=(1-\alpha)^{24}$

$=\{(1-\alpha)^6\}^4$

$=27^4$

$=3^{12}$

$P(\alpha)=(1+\alpha)^{24}$

$=(-\alpha^2)^{24}=1$