0002096543097999

名城大学

2014年 経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面上に，放物線 $C_1: y = x^2 - 1$，$C_2: y = x^2$ がある．C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(p,\ p^2-1)$ から C_2 に2本の接線を引き，それらの接点を $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha < \beta)$ とする．さらに，C_2 と2直線 PQ，PR で囲まれる部分の面積を S とする．

(1) P の座標を α，β を用いて表せ．

(2) S を α，β を用いて表せ．

(3) S は P の位置によらず一定であることを示し，その値を求めよ．

(1) C_2 において，$y' = 2x$ より，

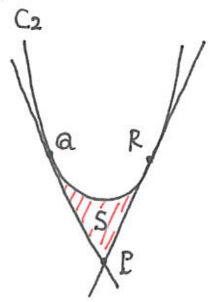
接線は $y = 2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$ と $y = 2\beta(x-\beta)+\beta^2$

すなわち，$y = 2\alpha x - \alpha^2$ と $y = 2\beta x - \beta^2$

これらの交点が点Pであるから，

$2\alpha x - \alpha^2 - (2\beta x - \beta^2) = 0 \quad \therefore\ x = \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ y = \alpha\beta$

$\therefore\ \underline{\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)}$ //



(2) $S = \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} x^2 - (2\beta x - \beta^2)\,dx$

$= \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\dfrac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^3$

$= \underline{\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3}$ //

(3) $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = p$，$\alpha\beta = p^2 - 1$ より，$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - 1 = \alpha\beta$

$\therefore\ (\alpha+\beta)^2 - 4 - 4\alpha\beta = 0 \quad \therefore\ (\alpha-\beta)^2 = 4$

$\alpha < \beta$ より，$\beta - \alpha = 2$

$\therefore\ S = \dfrac{1}{12}\cdot 2^3 = \underline{\dfrac{2}{3}\ (一定)}$ //