滋賀県立大学

2013 年 環境科学部・工学部 第 3 問

$\boxed{3}$ 四面体の 4 つの頂点を A_1，A_2，A_3，A_4 とし，空間のある点 P に関するそれぞれの位置ベクトルを $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，$\overrightarrow{a_4}$ とする．いま $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$ を順に T_1，T_2，T_3，T_4 で表しその重心をそれぞれ G_1，G_2，G_3，G_4 とする．

(1) 点 H を $\overrightarrow{PH}=\dfrac{\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}}{4}$ を満たす点とすると，4 つの直線 A_iG_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は H で交わることを示せ．

(2) 「直線 A_iH は T_i を含む平面に直交する $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$」という条件が成り立つと仮定する．このとき P として H を選べば，$\overrightarrow{a_j}$ と $\overrightarrow{a_k}$ の内積 $\overrightarrow{a_j}\cdot\overrightarrow{a_k}$ $(j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の値は $j \neq k$ を満たすどの j，k に対しても同じであることを示せ．

(3) (2) の条件が成り立てば，四面体 $A_1A_2A_3A_4$ は正四面体であることを示せ．