

2013年医学部第3問

3 実数 a に対し, 行列 $X(a)$ を

$$X(a) = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 2a^2+1 & -a \\ -a & a^2+2 \end{pmatrix}$$

と定める.

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を考える. ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $X(a)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ の大きさをそれぞれ l_0 , l_1 とおく. このとき

$$l_0 \leq l_1$$

を示せ. ただしベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ のことである.

(2) (1) で $l_0 = l_1$ となるとき, $X(a)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を示せ.

(3) a, b が異なる実数のとき, $X(a)^m = X(b)^n$ となるような正の整数 m, n は存在しないことを示せ.