2010年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

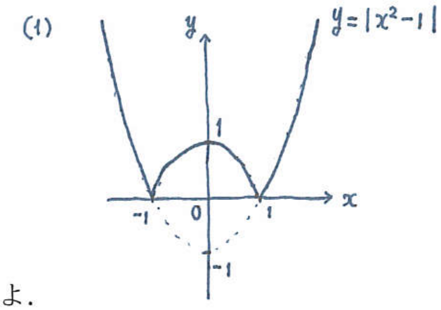
(1) $y=|x^2-1|$ のグラフを描け．

(2) a, b を実数とする．x についての方程式

$$|x^2-1|-ax-b=0 \quad \cdots (*)$$

が異なる4つの実数解を持つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

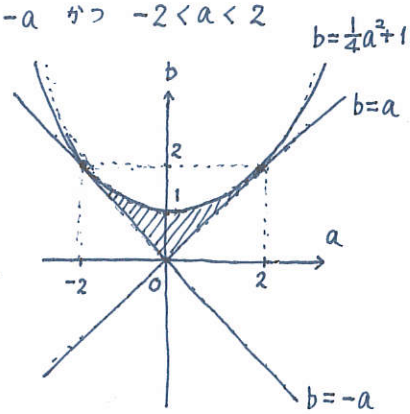
(3) (2)の方程式の解を α, β, γ, δ とするとき，$\delta-\gamma=\gamma-\beta=\beta-\alpha$ が成り立つときの a, b を求めよ．



(2) $(*)$ が異なる4つの実数解をもつ $\iff$ $y=-x^2+1$ と $y=ax+b$ が $-1<x<1$ において異なる2つの実数解をもつ

$\iff$ $x^2+ax+b-1=0$ が $-1<x<1$ において異なる2つの実数解をもつ

$$\therefore \begin{cases} D=a^2-4(b-1)>0 \\ -1<-\dfrac{a}{2}<1 \quad (\text{軸の条件}) \\ 1-a+b-1>0 \\ 1+a+b-1>0 \end{cases} \iff b<\frac{1}{4}a^2+1 \text{ かつ } b>a \text{ かつ } b>-a \text{ かつ } -2<a<2$$



$\therefore$ 右のグラフの斜線部分（ただし境界線は含まない）

(3) $\delta-\gamma=\gamma-\beta=\beta-\alpha \iff \alpha, \beta, \gamma, \delta$ がこの順に等差数列をなす

α, δ は，$x^2-ax-b-1=0$ の解，　$\therefore \alpha+\delta=a$．$\cdots$①

β, γ は　$x^2+ax+b-1=0$ の解　　$\therefore \beta+\gamma=-a \cdots$②

$\alpha<\beta<\gamma<\delta$ としても一般性を失わない．また，等差中項より，

$2\beta=\alpha+\gamma$ より，　$2\cdot\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4(b-1)}}{2}=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4(b+1)}}{2}+\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4(b-1)}}{2} \quad \cdots$③

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ がこの順で等差数列をなすので，$\alpha+\delta=\beta+\gamma$　$\therefore$①，② より $a=0$

③に $a=0$ を代入して解くと，$b=\dfrac{4}{5}$　このとき，逆に

$\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，$\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\delta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ となり，等差数列をなす．

また，a, b の値は (2) をみたしている．　よって，$\underline{a=0,\ b=\dfrac{4}{5}}$ //