0001828271718999

滋賀大学

2014年第2問

$\boxed{2}$ 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を以下のように定める．

$$a_1 = a,\ a_{2n} = a_{2n-1} + d,\ a_{2n+1} = ra_{2n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1 = a,\ b_{2n} = rb_{2n-1},\ b_{2n+1} = b_{2n} + d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ただし，$a \neq 0$，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a = 3$，$d = 1$，$r = 2$ のとき，b_9 を求めよ．

(2) 数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ．

$$a_{2n} = ar^{n-1} + \frac{d(r^n - 1)}{r - 1}$$

(3) すべての自然数 n に対して $b_{2n+1} - a_{2n} = \dfrac{2}{5}ar^n$ が成り立つとき，r の値を求めよ．

(1) $b_1 = 3,\ b_2 = 6,\ b_3 = 7,\ b_4 = 14,\ b_5 = 15,\ b_6 = 30,\ b_7 = 31,\ b_8 = 62,\ \underline{b_9 = 63}$ //

(2) $n=1$ のとき．$a_2 = a \cdot r^0 + \dfrac{d(r-1)}{r-1} = a + d$ となり．漸化式から求めた値と一致する

$n = k$ のとき，成り立つと仮定すると，$a_{2k} = ar^{k-1} + \dfrac{d(r^k - 1)}{r-1}$

$\therefore a_{2k+1} = ar^k + \dfrac{d(r^{k+1} - r)}{r-1}$ $\quad \therefore a_{2(k+1)} = ar^{(k+1)-1} + \dfrac{d(r^{k+1} - 1)}{r-1}$

$\therefore n = k+1$ のときも成り立つ　以上より，すべての自然数 n について成り立つ ■

(3) $a_1 = a,\ a_2 = a + d,\ a_3 = r(a+d),\ a_4 = r(a+d) + d,\ b_1 = a,\ b_2 = ra,\ b_3 = ra + d$

$\therefore n = 1$ のとき成り立つことから，$b_3 - a_2 = \dfrac{2}{5}ar = ar - a$

$\therefore a \neq 0$ なので，$r = \dfrac{5}{3}$ であることが必要

逆に，このとき(2)より

$$b_{2n+1} = a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} + \frac{3d\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1\right\}}{2} + \frac{2}{5}a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$= a\left(\frac{5}{3}\right)^n + \frac{3}{2}d\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1\right\}$$ が成り立つことがいえればよい

$$= \left(a + \frac{3}{2}d\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{3}{2}d$$

(i) $n = 1$ のとき $b_3 = \dfrac{5}{3}a + d$ となり成り立つ

(ii) $n = k$ のとき．成り立つと仮定すると，$b_{2k+1} = \left(a + \frac{3}{2}d\right)\left(\frac{5}{3}\right)^k - \frac{3}{2}d$

$\therefore b_{2k+2} = \left(a + \frac{3}{2}d\right)\left(\frac{5}{3}\right)^{k+1} - \frac{5}{2}d$ $\quad \therefore b_{2k+3} = \left(a + \frac{3}{2}d\right)\left(\frac{5}{3}\right)^{k+1} - \frac{3}{2}d$

$\therefore n = k+1$ のときも成り立つ　$\therefore$ すべての自然数 n で成り立ち，逆も示せた　$\therefore \underline{r = \dfrac{5}{3}}$ //