



2013年教育学部(算数・技術)第8問

8  $r$ を1より大きい実数とする. 半径1の円 $C$ の周上に点 $Q$ をとる. 最初に円 $C$ の中心 $P$ は座標平面の $(0, 1)$ , 点 $Q$ は $(0, 2)$ にあるものとし, 円 $C$ が $x$ 軸に接しながら $x$ 軸の正の方向にすべることなく転がっていく. 角 $\theta$ ラジアンだけ回転したとき, 半直線 $PQ$ 上に $PR = r$ となる点 $R$ をとる.  $\theta$ を0から $2\pi$ まで動かしたときの $R$ の軌跡を考える.

- (1)  $\alpha, \beta$ は $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ をみたし,  $\theta = \alpha$ のときの $R$ の座標と $\theta = \beta$ のときの $R$ の座標とが一致するものとする.  $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおくとき,  $r$ を $t$ を用いて表せ.
- (2) (1)において,  $\theta$ を $\alpha$ から $\beta$ まで動かしたときの $R$ の軌跡によって囲まれた図形の面積を $S$ とする.  $S$ を $t$ を用いて表せ.
- (3)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2}$ を求めよ.