

2016年 神学・経済 第5問

5 次の問いに答えよ.

Ⅰ X_i, Y_i ($i = 1, 2, 3$) は実数とする. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \neq 0, Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 \neq 0$ のとき,

$$(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3)^2 \leq (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を以下の指示に従って, 2通りの方法で証明せよ.

(1) すべての実数 t に対して,

$$(tX_1 - Y_1)^2 + (tX_2 - Y_2)^2 + (tX_3 - Y_3)^2 \geq 0$$

が成り立つことを利用して $\textcircled{1}$ を証明せよ. また等号が成り立つときの条件を示せ.

(2) 原点を O とする 2つのベクトル,

$$\vec{OA} = (X_1, X_2, X_3), \quad \vec{OB} = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

を考える. $\textcircled{1}$ を \vec{OA} と \vec{OB} によって表せ. その上で, $\textcircled{1}$ を証明せよ. また等号が成り立つときの 2つのベクトルの位置関係を示せ.

Ⅱ 対応する 2つの変数 x, y の値の組 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) を考える. 変数 x の平均を \bar{x} とし, x の偏差を X とする. すなわち, $X_i = x_i - \bar{x}$ ($i = 1, 2, 3$) であり, 変数 y についても同様とする. また x, y の相関係数が定義できる場合を考え, これを r とする. このとき, 上記 $\textcircled{1}$ を用いて,

$$-1 \leq r \leq 1$$

となることを示せ.