

2012年第2問

2 区間  $0 \leq x \leq \pi$  で連続な関数  $f(x)$  に対して、定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t \sin x - f(x)\}^2 dx \quad (t \text{ は実数})$$

を考える。定数  $c_1, c_2, c_3$  を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $I$  を、 $t$  および  $c_1, c_2, c_3$  を用いて表せ。

(2)  $c_1$  の値を求めよ。

以下では、 $I$  を最小にする  $t$  の値を  $t_0$  とし、その最小値を  $I_0$  とする。

(3)  $t_0$  を  $c_2$  を用いて表せ。また、 $I_0$  を  $c_2, c_3$  を用いて表せ。

(4) 次の定積分  $A, B$  の値を求めよ。

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx, \quad B = \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

(5)  $f(x) = x(\pi - x)$  のとき、 $c_2, c_3$  および  $I_0$  の値をそれぞれ求めよ。