

2015年 2期 第4問

4 $AB = 2$, $BC = 1 + \sqrt{2}$, $\angle B = 60^\circ$ の三角形 ABC の外接円を O とする. 頂点 A を通り辺 BC に垂直な直線が円 O と交わる点 (A と異なる点) を D とする. 次の各問の空欄に当てはまる最も適切な数値を記入せよ.

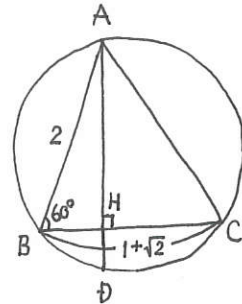
(1) $AC = \sqrt{\frac{5}{34}}$ である.

(2) 円 O の半径は $\frac{\sqrt{\frac{35}{36}}}{3}$ である.

(3) $\cos \angle CAD = \frac{\sqrt{\frac{37}{38}}}{5}$ である.

(4) $AD = \frac{3}{42} \sqrt{\frac{40}{3}} + \sqrt{\frac{41}{6}}$ である.

(5) 三角形 ACD の面積は $\frac{\frac{2}{43} \sqrt{\frac{3}{44}} + \frac{3}{45} \sqrt{\frac{6}{46}}}{47}$ である. 但し $44 < 46$ とする.



(1) 余弦定理より $AC^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \cos 60^\circ$

$\therefore AC^2 = 5 \quad \therefore AC = \sqrt{5}$ //

(2) 正弦定理より, $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$ (1)の結果より, $R = \frac{\sqrt{15}}{3}$ //

(3) 線分 AD と線分 BC の交点を H とすると, $\angle AHB = 90^\circ$ より, $\angle BAD = 30^\circ$

$\therefore AB = 2$ より, $BH = 1$, $AH = \sqrt{3}$ であるから, $\cos \angle CAD = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ //

(4) $\triangle ABH \sim \triangle CDH$ より, $AH : CH = BH : DH$

よって, $\sqrt{3} : \sqrt{2} = 1 : DH \quad \therefore DH = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \therefore AD = AH + DH = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$ //

(5) $\triangle ACD = \frac{1}{2} \times AD \times CH$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2}$

$= \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{6}$ //