0002158361487999

西南学院大学

2014年 神学・経済 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $f(x)=ax+b$ とする．ただし $a \neq 0$．定積分

$$I=\int_0^1[\{f(x)\}^2+2xf(x)]dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=1$ のとき，I を a で表せ．

(2) (1) の条件のとき，I を最小にする $f(x)$ と I の最小値を求めよ．

(3) $b=0$ とするとき，I を最小にする $f(x)$ と I の最小値を求めよ．

(1) $I=\int_0^1\left\{(ax+b)^2+2x(ax+b)\right\}dx$

$=\int_0^1 (a^2+2a)x^2+2(a+1)bx+b^2\,dx$

$=\left[\frac{a^2+2a}{3}x^3+(a+1)bx^2+b^2x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}(a^2+2a)+(a+1)b+b^2 \quad \cdots ①$

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 ax+b\,dx$

$=\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}a+b$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=1$ より．$b=1-\frac{1}{2}a \cdots ②$

②を①に代入して．

$I=\frac{1}{3}(a^2+2a)+(a+1)(1-\frac{1}{2}a)+(1-\frac{1}{2}a)^2$

$=\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2+1+1-a+\frac{1}{4}a^2$

$=\underline{\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{6}a+2}$ //

(2) $I=\frac{1}{12}(a^2+2a)+2$

$=\frac{1}{12}(a+1)^2+\frac{23}{12}$

$\therefore a=-1$ のとき．I は最小となる．②より．このとき．$b=\frac{3}{2}$

以上より．$\underline{f(x)=-x+\frac{3}{2} \text{ のとき．} I \text{ は最小値 } \frac{23}{12} \text{ をとる}}$ //

(3) ①より．$b=0$ のとき

$I=\frac{1}{3}(a^2+2a)$

$=\frac{1}{3}(a+1)^2-\frac{1}{3}$

$\therefore a=-1$ のとき．I は最小

$\therefore \underline{f(x)=-x \text{ のとき．} I \text{ は最小値 } -\frac{1}{3} \text{ をとる}}$ //