2014年 文・法 第5問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

5 $a>0$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=-x^2,\quad g(x)=x^2-2ax$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $a=1$ のとき，2つの放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

で定義する．$F(x)$ を a を用いて表せ．

(3) a の関数 $S(a)$ を

$$S(a)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

で定義する．$S(a)$ の最小値を求めよ．

(1) $a=1$ のとき．

$f(x)-g(x)=0 \iff -2x^2+2x=0$

$\iff -2x(x-1)=0$

∴ 交点の x 座標は $x=0,1$

また，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq g(x)$

$$\therefore S=\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx$$

$$=-2\int_0^1 x(x-1)\,dx$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(1-0)^3$$

$$=\underline{\frac{1}{3}}\ //$$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_0^x -2t^2+2at\,dt$

$$=\left[-\frac{2}{3}t^3+at^2\right]_0^x$$

$$=\underline{-\frac{2}{3}x^3+ax^2}\ //$$

(3) $f(x)-g(x)=-2x^2+2ax$

$=-2x(x-a)$

~~(i) $a\leqq 0$ のとき．~~

~~$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\leqq g(x)$~~

$$\cancel{\therefore S(a)=\int_0^1 -(f(x)-g(x))\,dx}$$

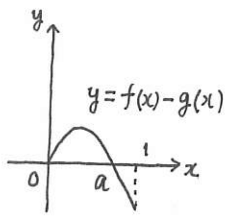
$$\cancel{=\int_0^1 2x^2-2ax\,dx}$$

$$\cancel{=\left[\frac{2}{3}x^3-ax^2\right]_0^1}$$

$$=-a+\frac{2}{3}$$

$a>0$ なので これは不要！

(ii) $0<a<1$ のとき．



$$S(a)=\int_0^a f(x)-g(x)\,dx+\int_a^1 g(x)-f(x)\,dx$$

$$=\int_0^a -2x^2+2ax\,dx+\int_a^1 2x^2-2ax\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a+\left[\frac{2}{3}x^3-ax^2\right]_a^1$$

$$=-\frac{2}{3}a^3+a^3+\frac{2}{3}-a-\frac{2}{3}a^3+a^3$$

$$=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}$$

(iii) $a\geqq 1$ のとき．

$$S(a)=\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+ax^2\right]_0^1$$

$$=a-\frac{2}{3}$$

2枚目につづく

2014年 文・法 第5問　　2枚目／2枚

数理 石井K

5 $a>0$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=-x^2,\quad g(x)=x^2-2ax$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $a=1$ のとき，2つの放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

で定義する．$F(x)$ を a を用いて表せ．

(3) a の関数 $S(a)$ を

$$S(a)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

で定義する．$S(a)$ の最小値を求めよ．

(3) のつづき．

(ii) のときの最小値を求める．

$$S'(a)=2a^2-1$$
$$=2\left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

増減表より最小値は．$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

一方，(iii) のときは．$S(a)=a-\frac{2}{3}$ (単調増加) より

$$S(a)\geqq S(1)=\frac{1}{3}>\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

以上より．

$S(a)$ の最小値は．$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ $\left(a=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ のとき}\right)$ //