



2013年 文芸学部 第2問

2 $\triangle ABC$ において,

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -5, \quad \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -6, \quad \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -3, \quad \angle BAC = \theta$$

であるとき、 $\triangle ABC$ の面積を求める。空欄にあてはまる値を解答欄に記入せよ。

条件より、 $AB = \boxed{\text{ア}}$, $AC = \boxed{\text{イ}}$ となるから、 $\cos \theta = \boxed{\text{ウ}}$ となる。よって、 $\sin \theta = \boxed{\text{エ}}$ となるので、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{オ}}$ となる。

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -5 \text{ より } \vec{AB} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = -5$$

$$\therefore -\vec{AB} \cdot \vec{CA} - |\vec{AB}|^2 = -5$$

$$\therefore \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -3 \text{ より } |\vec{AB}|^2 = 8 \quad \therefore \underline{AB = 2\sqrt{2}}$$

$$\text{同様に, } \vec{CA} \cdot (\vec{CB} - \vec{CA}) = -3$$

$$\therefore -\vec{BC} \cdot \vec{CA} - |\vec{CA}|^2 = -3$$

$$\therefore \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -6 \text{ より } |\vec{CA}|^2 = 9 \quad \therefore \underline{AC = 3}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{AB} = -3 \text{ より, } -|\vec{AC}| |\vec{AB}| \cdot \cos \theta = -3$$

$$\therefore 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \theta = 3 \quad \therefore \underline{\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \quad \sin \theta > 0 \text{ より } \underline{\sin \theta = \frac{\sqrt{14}}{4}}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\sqrt{7}}{2}}}$$