0001953816408999

成城大学

2014年 社会イノベーション学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$（$n$は自然数）を満たす整数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} のそれぞれを a_n と b_n で表す漸化式を作れ．

(2) 漸化式 $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ を満たす実数の組 $(p,\ q)$ を2組求めよ．

(3) (2)で求めた2つの漸化式を解いて，一般項 a_n，b_n を求めよ．

(1) $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n$

$= (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})$

$= a_n + 2b_n + (b_n + a_n)\sqrt{2}$

$\therefore$ $\underline{a_{n+1} = a_n + 2b_n,\quad b_{n+1} = a_n + b_n}$ //

(2) (1)で求めた，a_{n+1}，b_{n+1} を代入すると．

$a_n + 2b_n + p(a_n + b_n) = qa_n + pqb_n$

$\therefore$ $(1+p-q)a_n + (2+p-pq)b_n = 0$

$\therefore \begin{cases} p-q=-1 \\ 2+p-pq=0 \end{cases} \iff \begin{cases} p-q=-1 \\ 2+p-p\cdot(p+1)=0 \end{cases}$

$\therefore$ $p^2=2$ より．$\underline{(p,q) = (\sqrt{2},\sqrt{2}+1),\ (-\sqrt{2},1-\sqrt{2})}$ //

(3) $a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1} = (\sqrt{2}+1)(a_n + \sqrt{2}b_n)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n + \sqrt{2}b_n\}$ は初項 $a_1 + \sqrt{2}b_1 = 1+\sqrt{2}$，公比 $(\sqrt{2}+1)$ の

等比数列より．$a_n + \sqrt{2}b_n = (1+\sqrt{2})^n$

同様にして．$a_n - \sqrt{2}b_n = (1-\sqrt{2})^n$

$\therefore$ 足し合わせて．$\underline{a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}}$ //，引いて．$b_n = \underline{\dfrac{\sqrt{2}\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\}}{4}}$ //