成城大学

2014年 経済学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ x の関数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - a$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値を $g(a)$ とおく．ただし，a は実数とする．

(1) $g(a)$ を求めよ．

(2) $g(a)$ の最小値と，その時の a を求めよ．

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{6}a^3-a$ 極大	$\searrow$	

(i) $\nearrow$

(1) $f'(x) = -x^2 + ax$

$= -x(x-a)$

(i) $0<a<2$ のとき　最大値 $g(a) = \frac{1}{6}a^3 - a$

(ii) $a \leqq 0$ のとき．

$0 \leqq x \leqq 2$ で $f'(x)$ は $f'(x) \leqq 0$ となるから．　$g(a) = f(0) = -a$

(iii) $a \geqq 2$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ で $f'(x) \geqq 0$ なので　$g(a) = f(2) = a - \frac{8}{3}$

(i)〜(iii) より

$$g(a) = \begin{cases} \frac{1}{6}a^3 - a & (0<a<2) \\ -a & (a \leqq 0) \\ a - \frac{8}{3} & (a \geqq 2) \end{cases}$$

//

(2) $0<a<2$ において，$g'(a) = \frac{1}{2}a^2 - 1$

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 極小	$\nearrow$	

右の増減表より．$0<a<2$ での最小値は

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($a=\sqrt{2}$ のとき)

$a \leqq 0$ での最小値は 0 ($a=0$ のとき)

$a \geqq 2$ での　〃　$-\frac{2}{3}$ ($a=2$ のとき)

$-\frac{2\sqrt{2}}{3} < -\frac{2}{3}$ より．　最小値 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($a=\sqrt{2}$ のとき)

//