

2015年医学部第2問

2  $p$  を  $0 \leq p \leq 1$  をみたす実数とする. 1個の白玉と3個の赤玉が入っている袋があり, この袋から1個の玉を取り出して, 取り出した玉に新たに白か赤の玉を1個加えて袋に戻す試行を行う. ただし, この試行の際に加えられる新たな玉の色は

- 確率  $p$  で取り出した玉と同じ色
- 確率  $1 - p$  で取り出した玉と異なる色

とする.

例えば,  $p = 1$  の場合, 第1回目の試行において赤玉が取り出されると, 取り出した赤玉に加えてもう一つ赤玉を袋に戻す. そして第1回目の試行が終わったときには, 袋の中に1個の白玉と4個の赤玉が入っている.

第  $n$  回目の試行で白玉が取り出される確率を  $q_n$  とする.

- (1) 第  $n$  回目の試行で新たに加えられた玉が白玉であり, かつこの白玉が  $n + 1$  回目の試行で取り出される確率を  $r_n$ ,  $p$ ,  $q_n$  を用いて表せ.
- (2)  $q_{n+1}$  を  $n$ ,  $p$ ,  $q_n$  を用いて表せ. ただし  $n + 1$  回目の試行において,  $n$  回目に入れた玉を取り出さないという条件の下で,  $n + 1$  回目に白玉を取り出す条件つき確率が  $q_n$  と等しいことを用いてよい.
- (3)  $r_n = q_n - \frac{1}{2}$  とおくとき,  $r_{n+1}$  を  $n$ ,  $p$ ,  $r_n$  を用いて表せ.
- (4)  $p = 0$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $p = 1$  のときの  $q_n$  をそれぞれ  $n$  を用いて表せ.