

2015年医学部第2問

2 p を $0 \leq p \leq 1$ をみたす実数とする. 1個の白玉と3個の赤玉が入っている袋があり, この袋から1個の玉を取り出して, 取り出した玉に新たに白か赤の玉を1個加えて袋に戻す試行を行う. ただし, この試行の際に加えられる新たな玉の色は

- 確率 p で取り出した玉と同じ色
- 確率 $1 - p$ で取り出した玉と異なる色

とする.

例えば, $p = 1$ の場合, 第1回目の試行において赤玉が取り出されると, 取り出した赤玉に加えてもう一つ赤玉を袋に戻す. そして第1回目の試行が終わったときには, 袋の中に1個の白玉と4個の赤玉が入っている.

第 n 回目の試行で白玉が取り出される確率を q_n とする.

- (1) 第 n 回目の試行で新たに加えられた玉が白玉であり, かつこの白玉が $n + 1$ 回目の試行で取り出される確率を r_n , p , q_n を用いて表せ.
- (2) q_{n+1} を n , p , q_n を用いて表せ. ただし $n + 1$ 回目の試行において, n 回目に入れた玉を取り出さないという条件の下で, $n + 1$ 回目に白玉を取り出す条件つき確率が q_n と等しいことを用いてよい.
- (3) $r_n = q_n - \frac{1}{2}$ とおくとき, r_{n+1} を n , p , r_n を用いて表せ.
- (4) $p = 0$, $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$ のときの q_n をそれぞれ n を用いて表せ.