



2016年理学部第2問

2  $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{2(x^2 + x + 1)}$  とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $g(f(x)) = f(2x + 1)$  が成り立つことを示せ.

(2) 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定め, 数列  $\{b_n\}$  を

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = g(b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める.

(ア)  $b_n = f(a_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(イ) 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項をそれぞれ求めよ.

(ウ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.