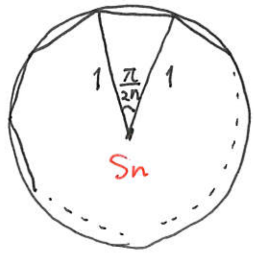
2014 年 教育・経済学部 第 1 問

$\boxed{1}$ 正の整数 n に対して，半径 1 の円に内接する正 $4n$ 角形の面積を S_n とし，外接する正 $4n$ 角形の面積を T_n とする．このとき，$S_n > 0.95T_n$ となる最小の数 n を求めよ．

右図より．$S_n = 4n \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2n}$

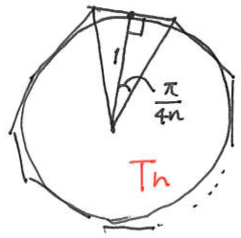
$= 2n \sin\frac{\pi}{2n}$

$= 4n \sin\frac{\pi}{4n} \cos\frac{\pi}{4n}$ 　倍角．



右図より．$T_n = 4n \cdot 1 \cdot \tan\frac{\pi}{4n} \cdot 1$

$= 4n \tan\frac{\pi}{4n}$



$\therefore\ S_n > 0.95T_n \iff \frac{S_n}{T_n} > 0.95$

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4n}}{\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\cos\frac{\pi}{4n}}}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{4n}$$

$$= \frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}}{2}$$

$\therefore\ \cos\frac{\pi}{2n} > 0.9 \iff \cos^2\frac{\pi}{2n} > 0.81$

$\cos^2\frac{\pi}{2n}$ は n について 単調 ~~減~~ 増加 で

- $n = 3$ のとき　$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} < 0.81$
- $n = 4$ のとき　$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} > 0.85$

$\therefore\ \underline{n = 4}$ //