福岡教育大学

2015年 第4問

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 関数 $f(x)=x-\log x$ の最小値を求めよ．

(2) a を1より大きい定数とし，曲線 $y=a\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=\tan x$ $\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分 D の面積が $1-\log 2$ であるとする．次の（ア），（イ）に答えよ．

（ア）a の値を求めよ．

（イ）D を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$=\frac{x-1}{x}$

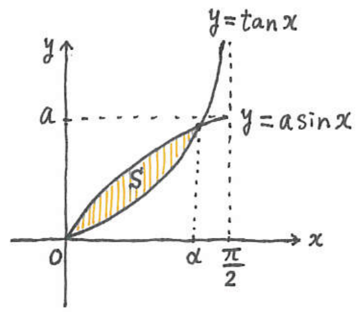
x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	1	↗

∴ 右の増減表より．$f(x)$ の最小値は 1 ($x=1$ のとき)〃

(ア)

(2) 曲線 $y=a\sin x$ と $y=\tan x$ の $0<x<\frac{\pi}{2}$ における交点の

x 座標を α とおくと，D の面積 S は，



$S=\int_0^{\alpha} a\sin x-\tan x\,dx$

$=\left[-a\cos x+\log|\cos x|\right]_0^{\alpha}$

$=-a\cos\alpha+\log(\cos\alpha)+a$

ここで，$a\sin\alpha=\tan\alpha$ より，$\frac{\sin\alpha(a\cos\alpha-1)}{\cos\alpha}=0$

$\sin\alpha>0$ より．$\cos\alpha=\frac{1}{a}$

∴ $S=a-1-\log a$　　∴ $a-1-\log a=1-\log 2$　　∴ $a-\log a=2-\log 2$ …①

(1) と $a>1$ であることから．①の左辺は単調増加 なので，求める a は．ただ1つであることが分かる．　∴ $a=2$〃

(イ) $V=\pi\int_0^{\alpha}(a\sin x)^2-\tan^2 x\,dx$

(ア) より．$a=2$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ より．$\alpha=\frac{\pi}{3}$ となるので

$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\pi\left[4\cdot\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2}-\tan x+x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\pi\left(4\cdot\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{24}-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\pi^2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi$〃