0001971098208999

埼玉大学

2015年 教育・経済学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ aをある実数とする．$f(x)$はxの2次関数であり，関数$F(x)$を

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

で定義する．関数$f(x)$，$F(x)$が条件

$$f(a)=0,\quad F(2a)=-a^3,\quad F(3a)=-8a^3$$

をみたすとき，$f(x)$および$F(x)$を求めよ．

$f(x)=px^2+qx+r$とおいても解けるが

$F(x)=\left[\frac{p}{3}t^3+\frac{q}{2}t^2+rt\right]_a^x$

これがかなり面倒くさい！

$f(a)=0$より．$f(x)=b(x-a)^2+c(x-a)$ と表せる（b, cは実数の定数）

$\therefore F(x)=\left[\frac{b}{3}(t-a)^3+\frac{c}{2}(t-a)^2\right]_a^x$

$=\frac{b}{3}(x-a)^3+\frac{c}{2}(x-a)^2$

$\therefore F(2a)=-a^3$ より．$\frac{b}{3}\cdot a^3+\frac{c}{2}\cdot a^2=-a^3$　$\therefore a^2(2ab+3c+6a)=0\cdots①$

$F(3a)=-8a^3$より．$\frac{b}{3}\cdot 8a^3+\frac{c}{2}\cdot 4a^2=-8a^3$　$\therefore a^2(4ab+3c+12a)=0\cdots②$

(i) $a=0$ のとき．

①，②はともに成り立つので，b, cは任意の実数．

(ii) $a\neq 0$のとき．

①より．$2ab+3c+6a=0\cdots①'$

②より．$4ab+3c+12a=0\cdots②'$

②'−①'より．$2a(b+3)=0$　$a\neq 0$より．$b=-3$　①'に代入して $c=0$

(i), (ii)より．

$$f(x)=\begin{cases} bx^2+cx & (a=0\text{のとき．}b, c\text{は任意の実数で}b\neq 0) \\ -3(x-a)^2 & (a\neq 0\text{のとき}) \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2 & (a=0\text{のとき．}b, c\text{は任意の実数で}b\neq 0) \\ -(x-a)^3 & (a\neq 0\text{のとき}) \end{cases}$$

——//