

2013年学芸(情報科学)第4問

4 $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \cos x \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(y) \sin y dy + \sin x$$

をみたすとき、 $f(x)$ を求めよ。 **定数** $f(x) = a \cos x + \sin x$ (a : 定数) とおくと、

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a \cos y + \sin y) \sin y dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sin y \cos y + \sin^2 y dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a}{2} \sin 2y + \frac{1 - \cos 2y}{2} dy$$

$$= \left[-\frac{a}{4} \cos 2y + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \sin 2y \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{a}{4}$$

$$\therefore \frac{3}{4}a = \frac{\pi - 2}{8}$$

$$\therefore a = \frac{\pi - 2}{6}$$

$$\therefore \underline{f(x) = \frac{\pi - 2}{6} \cos x + \sin x} //$$